C.8

Derivate

Pag. 176 ⟵ Dimostrazione del Teorema 6.4

Teorema 6.4 (**Algebra delle derivate**) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora sono ivi derivabili le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ e, se $g'(x_0) \neq 0$, la funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Inoltre si ha*

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0), \\
(f\,g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Verifichiamo dapprima la (6.3). Usando il Teorema 4.10, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) \pm g(x)\big) - \big(f(x_0) \pm g(x_0)\big)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) \pm g'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

Mostriamo ora la (6.4). A tale scopo ricordiamo che ogni funzione derivabile è continua (Proposizione 6.3) e pertanto $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Dunque si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} \\
&\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x) + f(x_0)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} \\
&\quad = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x) + f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)\,.
\end{aligned}
$$

Infine, dimostriamo la (6.5). Osserviamo innanzitutto che essendo $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$, il Teorema di permanenza del segno 4.2 assicura l'esistenza di un intorno di x_0 in cui si ha $g(x) \neq 0$. Dunque la funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è definita in tale intorno e ne possiamo considerare il rapporto incrementale. Risulta

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x)}{g(x)\, g(x_0)\, (x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x)}{g(x)\, g(x_0)\, (x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\, g(x_0)} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right) \\
&= \frac{1}{\big(g(x_0)\big)^2} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x_0) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right) \\
&= \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Pag. 177 ⟵ Dimostrazione del Teorema 6.7

Teorema 6.7 (Derivata di una funzione composta) *Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Sia poi $g(y)$ una funzione derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Dimostrazione. Usando la prima formula dell'incremento finito (6.10) applicata alla funzione g nel punto $y_0 = f(x_0)$, si ha

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0), \quad y \to y_0\,.$$

Ricordando la definizione di o-piccolo, ciò significa che esiste una funzione φ soddisfacente $\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = 0 = \varphi(y_0)$ tale che

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y-y_0) + \varphi(y)(y-y_0)\,, \qquad \text{in un intorno } I(y_0) \text{ di } y_0\,.$$

Essendo f continua in x_0 (per la Proposizione 6.3), esiste un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che $f(x) \in I(y_0)$ per ogni $x \in I(x_0)$. Ponendo $y = f(x)$ nella relazione precedente, otteniamo

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \varphi(f(x))\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Passando al limite e osservando che, per il Teorema di sostituzione 4.15, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = 0\,,$$

concludiamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&\quad = g'(f(x_0)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&\quad = g'(f(x_0)) f'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

□

Pag. 178 ⟵ Dimostrazione del Teorema 6.9

Teorema 6.9 (Derivata della funzione inversa) *Sia $f(x)$ una funzione continua e invertibile in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$; inoltre, sia f derivabile in x_0, con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dimostrazione. Usando il Teorema 4.33, la funzione inversa è continua in un intorno di y_0. Posto $x = f^{-1}(y)$, si ha in tale intorno

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}\,.$$

Applicando il Teorema di sostituzione 4.15 con $x = f^{-1}(y)$, risulta

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

□

Teorema di Cauchy

Il seguente teorema generalizza il Teorema di Lagrange 6.23 (nel senso che ponendo $g(x) = x$ si ritrova tale teorema). Esso verrà utilizzato nelle dimostrazioni del Teorema di de l'Hôpital 6.40 e della formula di Taylor con resto di Lagrange (Teorema 7.2).

Teorema C.8.1 (**di Cauchy**) *Siano f e g due funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, continue su $[a, b]$ e derivabili (almeno) su (a, b); si supponga inoltre che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,. \tag{C.8.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che $g(a) \neq g(b)$; infatti se così non fosse, per il Teorema di Rolle, la funzione $g'(x)$ si annullerebbe in almeno un punto di (a, b) contro l'ipotesi.
Consideriamo ora la funzione ausiliaria definita su $[a, b]$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Essa è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b), perché differenza di due funzioni che per ipotesi soddisfano tali proprietà. Notiamo che si ha

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x).$$

Si verifica facilmente che

$$h(a) = f(a), \qquad h(b) = f(a).$$

Pertanto, tutte le ipotesi del Teorema di Rolle sono soddisfatte dalla funzione h. Ne segue che esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x_0) = 0,$$

che è precisamente la (C.8.1). □