

C.10

Funzioni convesse

Premettiamo il seguente lemma, il quale mostra che la condizione di convessità locale (cioè valida in un intorno di ogni punto di I) è in realtà globale (cioè valida su tutto I).

Lemma C.10.1 *Sia f derivabile sull'intervallo I . Allora f è convessa su I se e solo se per ogni $x_0 \in I$ si ha*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I. \quad (\text{C.10.1})$$

Dimostrazione. Ovviamente, è sufficiente mostrare che se f è convessa su I secondo la Definizione 6.32, allora vale la (C.10.1). A tale scopo, è utile osservare che f è convessa su I se e solo se lo è la funzione $g(x) = f(x) + ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$; infatti la disuguaglianza $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ equivale alla disuguaglianza $g(x) \geq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$.

Sia dunque $x_0 \in I$ fissato arbitrariamente e si consideri la funzione convessa ausiliaria $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, la quale soddisfa $g(x_0) = g'(x_0) = 0$. Dobbiamo mostrare che $g(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Supponiamo che x_0 non sia l'estremo destro dell'intervallo I e mostriamo che $g(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$; un ragionamento simmetrico completerà la dimostrazione.

Essendo g convessa in x_0 , si ha $g(x) \geq 0$ in un intorno (destro) di x_0 . Ha dunque senso porre

$$P = \{x > x_0 : g(s) \geq 0, \forall s \in [x_0, x]\}$$

e $x_1 = \sup P$.

Se x_1 coincide con l'estremo destro di I , abbiamo dimostrato la tesi. Per assurdo, supponiamo che x_1 sia interno a I ; per definizione, si ha $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [x_0, x_1)$, mentre in ogni intorno (destro) di x_1 esistono punti $x \in I$ in cui $g(x) < 0$. Da ciò e dalla continuità di g in x_1 deduciamo che necessariamente $g(x_1) = 0$ (dunque in particolare $x_1 = \max P$). Facciamo vedere che $g(x) = 0$, $\forall x \in [x_0, x_1]$. Se così è, allora $g'(x_1) = 0$ (in quanto g è derivabile in x_1 ed è costante in un intorno sinistro di tale punto). Dunque l'ipotesi di convessità di g in x_1 garantisce l'esistenza di

un intorno di x_1 in cui si ha $g(x) \geq 0$, contro la definizione di x_1 . Siamo dunque arrivati ad un assurdo.

Non resta che dimostrare che $g(x) = 0$ in $[x_0, x_1]$. Essendo per definizione $g(x) \geq 0$ in $[x_0, x_1]$, supponiamo per assurdo che $M = \max\{g(x) : x \in [x_0, x_1]\} > 0$, e sia $\bar{x} \in (x_0, x_1)$ tale che $g(\bar{x}) = M$. Grazie al Teorema di Fermat 6.21, si ha $g'(\bar{x}) = 0$ e dunque applicando l'ipotesi che g sia convessa in \bar{x} , esiste un intorno di \bar{x} in cui $g(x) \geq g(\bar{x}) = M$; ma essendo M il massimo di g in $[x_0, x_1]$, necessariamente si ha $g(x) = M$ in tale intorno. Poniamo dunque

$$Q = \{x > \bar{x} : g(s) = M, \forall s \in [\bar{x}, x]\}$$

e $x_2 = \sup Q$. Per la continuità di g , si ha $x_2 = \max Q$ ed inoltre $x_2 < x_1$ in quanto $g(x_1) = 0$. Come sopra, applicando l'ipotesi di convessità di g in x_2 , si giunge ad un assurdo. \square

Pag. 196 ← Dimostrazione del Teorema 6.36

Teorema 6.36 *Sia I un intervallo ed f una funzione derivabile su I . Valgono le seguenti implicazioni:*

- a) *Se f è convessa su I , allora f' è crescente su I .*
- b1) *Se f' è crescente su I , allora f è convessa su I ;*
- b2) *se f' è strettamente crescente su I , allora f è strettamente convessa su I .*

Dimostrazione.

a) Siano $x_1 < x_2$ due punti di I . Dalla (C.10.1) con $x_0 = x_1$ e $x = x_2$ otteniamo

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

mentre ponendo $x_0 = x_2$ e $x = x_1$ abbiamo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Il risultato segue allora combinando le due disuguaglianze.

b1) Sia $x > x_0$ un punto di I . Applicando la seconda formula dell'incremento finito alla f nell'intervallo $[x_0, x]$, otteniamo l'esistenza di un punto $\bar{x} \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x - x_0).$$

Per la monotonia di f' , si ha $f'(\bar{x}) \geq f'(x_0)$ e dunque vale la (C.10.1). Se $x < x_0$, si ragiona in modo analogo.

b2) Nella dimostrazione del punto precedente si ha ora $f'(\bar{x}) > f'(x_0)$, dunque la disuguaglianza (C.10.1) è stretta (per $x \neq x_0$). \square