C.12

Integrale di Cauchy

Pag. 332 ⟵ Dimostrazione del Teorema 9.20

Teorema 9.20 *Le successioni $n \mapsto s_n$ e $n \mapsto S_n$ sono entrambe convergenti, e convergono allo stesso limite.*

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni $p \geq 1$, si ha

$$s_n \leq s_{pn}\,, \qquad S_{pn} \leq S_n\,.$$

Infatti, se si suddivide l'intervallo I_k in p sottointervalli I_{ki} uguali ($1 \leq i \leq p$) di ampiezza $\frac{\Delta x}{p}$, e si pone

$$m_{ki} = \min_{x \in I_{ki}} f(x)\,,$$

per ogni i si avrà $m_k \leq m_{ki}$ e dunque

$$m_k \Delta x \leq \sum_{i=1}^{p} m_{ki} \frac{\Delta x}{p}\,.$$

Sommando su k si ottiene $s_n \leq s_{pn}$. Analogamente si dimostra la seconda disuguaglianza.

Siano ora s_n e S_m due somme arbitrarie. Si ha

$$s_n \leq s_{nm} \leq S_{nm} \leq S_m$$

e pertanto ogni somma inferiore è minore o uguale ad ogni somma superiore. Poniamo

$$s = \sup_n s_n \qquad \text{e} \qquad S = \inf_n S_n\,.$$

Per quanto visto, si ha $s \leq S_m$, per ogni m e dunque $s \leq S$. Dimostriamo che $s = S$ e che tale valore è il limite cercato. Per il Teorema C.6.4 di Heine-Cantor, la funzione f è uniformemente continua, quindi fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $x', x'' \in [a, b]$ e

$$|x' - x''| < \delta \qquad \text{allora} \qquad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\,;$$

definiamo l'intero n_ε tale che $\frac{b-a}{n_\varepsilon} < \delta$. Sia $n \geq n_\varepsilon$ arbitrario; in ogni intervallo I_k di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ in cui suddividiamo l'intervallo $[a, b]$, esistono punti ξ_k e η_k tali che

$$f(\xi_k) = m_k = \min_{x \in I_k} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(\eta_k) = M_k = \max_{x \in I_k} f(x)\,.$$

Poiché $|\eta_k - \xi_k| \leq \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{n_\varepsilon} < \delta$, si ha

$$M_k - m_k = f(\eta_k) - f(\xi_k) < \varepsilon\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(M_k - m_k\big) \Delta x < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x = \varepsilon(b-a)\,. \end{aligned}$$

Ciò significa che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha $0 \leq S_n - s_n < \varepsilon(b-a)$. Ne segue che

$$S - s \leq S_n - s_n < \varepsilon(b-a)\,.$$

Facendo tendere ε a 0, si ha $S = s$. Inoltre

$$S - s_n \leq S_n - s_n < \varepsilon \qquad \text{se} \quad n \geq n_\varepsilon$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S\,.$$

Analogamente, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. $\square$